



TITLE:

# 線形2次錐相補性制約つき数理計画問題に対する平滑化逐次2次計画法 (最適化手法の理論と応用の繋がり)

AUTHOR(S):

奥野, 貴之; 林, 俊介; 福島, 雅夫; 山村, 広

---

CITATION:

奥野, 貴之 ...[et al]. 線形2次錐相補性制約つき数理計画問題に対する平滑化逐次2次計画法 (最適化手法の理論と応用の繋がり). 数理解析研究所講究録 2013, 1829: 1-8

ISSUE DATE:

2013-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194815>

RIGHT:

# 線形2次錐相補性制約つき数理計画問題に対する平滑化逐次2次計画法

奥野 貴之 (Takayuki Okuno)\*      林 俊介 (Shunsuke Hayashi)†

福島 雅夫 (Masao Fukushima)‡

山村 広 (Yamamura Hiroshi)§

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻

Department of Applied Mathematics and Physics

Graduate School of Informatics, Kyoto University

## Abstract

In this paper, we focus on the mathematical program with second-order cone (SOC) complementarity constraints, which contains the well-known mathematical program with nonnegative complementarity constraints as a subclass. For solving such a problem, we propose a smoothing-based sequential quadratic programming (SQP) method. We first replace the SOC complementarity constraints with equality constraints using the smoothing natural residual function, and apply the SQP method to the smoothed problem with decreasing the smoothing parameter. We show that the proposed algorithm possesses the global convergence property under mild assumptions. We finally observe the effectiveness of the algorithm by means of numerical experiments.

## 1 Introduction

本論文では, つぎの線形2次錐相補性制約をもつ数理計画問題 (MPSOCC) について考える.

$$\begin{aligned} & \underset{w \in \mathbb{R}^{n+2m}}{\text{Minimize}} && f(x, y) \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && z = Nx + My + q \\ & && \mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K} \end{aligned} \tag{1.1}$$

---

\*t\_okuno@amp.i.kyoto-u.ac.jp

†shunhaya@amp.i.kyoto-u.ac.jp

‡fuku@amp.i.kyoto-u.ac.jp

§yamamura@amp.i.kyoto-u.ac.jp

ここで  $w := (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ,  $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  は連続的微分可能な関数,  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^p$ ,  $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $q \in \mathbb{R}^m$  は与えられた行列とベクトルであり,  $\perp$  はベクトルの直交をあらわす.  $\mathcal{K}$  は 2 次錐 (SOC) の Cartesian 直積であり,  $\mathcal{K} := \mathcal{K}^{m_1} \times \mathcal{K}^{m_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{m_\ell} \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_\ell} = \mathbb{R}^m$  と定義される. ここで  $\mathcal{K}^{m_i}$  は  $m_i$  次元 2 次錐であり,  $m_i = 1$  のときは  $\mathcal{K}^{m_i} := \mathbb{R}_+ := \{u \in \mathbb{R} \mid u \geq 0\}$ ,  $m_i \geq 2$  のときは  $\mathcal{K}^{m_i} := \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i-1} \mid \|u_2\| \leq u_1\}$  である. 簡単のため本論文を通して各  $i$  について  $m_i \geq 2$  と仮定する.

2 次錐制約をもつ問題は近年多くの研究者たちに注目されている. その中で最も重要な問題の一つが 2 次錐計画問題 (SOCP) [1] であり, フィルター設計問題やアンテナ配置問題, ロバスト最適化問題など応用は幅広い. 主双対内点法など SOCP を高速に解く手法も開発されている. また 2 次錐を含む他の重要な問題として 2 次錐相補性問題 (SOCCP) もあげられる. SOCCP はロバストナッシュ均衡問題 [8] など多くの問題への適用ができ, とくに SOCP の Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を満たす点を見つける問題は SOCCP として自然に定式化できる. SOCCP を解くためのアルゴリズムとして平滑化法に基づいた手法が開発されている. [6, 4]

MPSOCC (1.1) において  $\mathcal{K} = \mathbb{R}^m$  ならば, MPSOCC (1.1) は非負相補性制約つき数理計画問題 (MPCC) に帰着される. MPCC は工学や経済における幅広い応用があることから理論面と応用面において盛んに研究されてきた. [7] MPCC を解くための優れたアルゴリズムも多く存在し, 有効制約法 [5] や平滑化逐次 2 次計画法 [3] などがある.

MPCC, SOCP, SOCCP に関する研究は数多くある一方, MPSOCC に関する研究は未だ少ない. 最近, Yan, 福島 [12] によって平滑化法が提案され, その中で緩い仮定の下で停留点への収束性が示された. しかし, この手法は, 部分問題として平滑化した元の問題を各反復で解かねばならず, その計算コストは大きい. そうした問題点を改善するため, 本論文では平滑化法と逐次 2 次計画 (SQP) 法を組み合わせる. 本手法では, 各反復で平滑化した問題を近似した 2 次計画問題を解くだけでよく, 平滑化法に比べてより少ない計算コストで解を得ることが期待できる.

本論文の構成は以下のとおりである. まず 2 節では, 準備として 2 次錐相補性制約  $\mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K}$  に対する自然残差関数と平滑化関数を導入する. 3 節では, MPSOCC (1.1) に対して平滑化法と SQP 法を組み合わせた手法を提案する. 4 節では, 提案手法の収束解析をおこなう. 最後の 5 節では, 計算実験をおこない, 提案手法の有効性を調べる.

## 2 2 次錐相補性制約に対する自然残差関数と平滑化関数

### 2.1 2 次錐相補性制約に対する自然残差関数

提案手法では, 2 次錐相補性制約  $\mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K}$  を自然残差関数を用いて等価な等式制約として定式化する. 以下では, 2 次錐  $\mathcal{K}$  に関する自然残差関数  $\Phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を定義する.

**Definition 2.1.**  $P_{\mathcal{K}^m}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{K}^m$  を任意のベクトル  $y \in \mathbb{R}^m$  から  $m$  次元 2 次錐  $\mathcal{K}^m$  へのユークリッド射影とする. すなわち,  $P_{\mathcal{K}^m}(y) := \operatorname{argmin}_{z \in \mathcal{K}^m} \|y - z\|$  とする. このとき, 2 次錐  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{m_1} \times \mathcal{K}^{m_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{m_\ell}$  に関する自然残差関数  $\Phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

は

$$\Phi(y, z) := \begin{pmatrix} y^1 - P_{\mathcal{K}^{m_1}}(y^1 - z^1) \\ y^2 - P_{\mathcal{K}^{m_2}}(y^2 - z^2) \\ \vdots \\ y^\ell - P_{\mathcal{K}^{m_\ell}}(y^\ell - z^\ell) \end{pmatrix}$$

と定義される. ただし  $y := (y^1, y^2, \dots, y^\ell) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_\ell}$ ,  $z := (z^1, z^2, \dots, z^\ell) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_\ell}$  である.

このとき以下の性質が成り立つ [4].

$$\Phi(y, z) = 0 \iff \mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K} \quad (2.1)$$

## 2.2 自然残差関数に対する平滑化関数

前節で定義した自然残差関数  $\Phi$  は必ずしも微分可能ではない [4]. したがって, 関数  $\Phi$  に対して微分情報を利用したニュートン法などの手法を直接適用することはできない. そこで, この節では関数  $\Phi$  に対する平滑化関数を構成する. 一般に平滑化関数とは, つぎのような関数をいう.

**Definition 2.2.**  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を微分不可能な点をもつ関数とする. このとき, 以下の性質が成り立つとき, パラメータ  $\mu > 0$  を含む関数  $\Psi_\mu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を  $\Psi$  の平滑化関数という.

- $\mu > 0$  のとき  $\Psi_\mu$  は至るところで微分可能な関数である;
- $\lim_{\mu \rightarrow 0+} \Psi_\mu(z) = \Psi(z)$  が任意の  $z \in \mathbb{R}^m$  について成立する.

ここで 2 次錐  $\mathcal{K}^m$  に関するスペクトル分解と Chen-Mangasarian (CM) 関数  $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  [4] を導入する.

**Definition 2.3.** 任意のベクトル  $z := (z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$  に対して

$$z = \lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2$$

を 2 次錐  $\mathcal{K}^m$  に関するスペクトル分解とよぶ. ここで  $c^j \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ) は

$$c^j := \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1, (-1)^j \frac{z_2}{\|z_2\|} \right) & (z_2 \neq 0) \\ \frac{1}{2} (1, (-1)^j v) & (z_2 = 0), \end{cases}$$

$$\lambda_j := z_1 + (-1)^j \|z_2\|$$

である. ただし,  $v \in \mathbb{R}^{m-1}$  は  $\|v\| = 1$  をみたす任意のベクトルとする. このとき  $\lambda_j$ ,  $c^j$  ( $j = 1, 2$ ) をそれぞれ  $z$  の固有値, 固有ベクトルという.

**Definition 2.4.**  $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  が CM 関数であるとは

- $\hat{g}$  は微分可能な凸関数である;
- $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \hat{g}(\alpha) = 0$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\hat{g}(\alpha) - \alpha) = 0$ ;
- $0 < \hat{g}'(\alpha) < 1$

が任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  について成り立つときをいう.

スペクトル分解と CM 関数を使って, 自然残差関数に対する平滑化関数  $\Phi_\mu$  を構成する. 任意のベクトル  $y, z \in \mathbb{R}^m$  に対して  $y := (y^1, y^2, \dots, y^\ell) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_\ell} = \mathbb{R}^m$ ,  $z := (z^1, z^2, \dots, z^\ell) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_\ell} = \mathbb{R}^m$  とする. さらに任意の CM 関数  $\hat{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して関数  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を

$$g(z) := \begin{pmatrix} g^1(z^1) \\ \vdots \\ g^\ell(z^\ell) \end{pmatrix},$$

$$g^i(z^i) := \hat{g}(\lambda_{i1})c^{i1} + \hat{g}(\lambda_{i2})c^{i2}$$

と定義する. ここで  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $c^{ij} \in \mathbb{R}^{m_i}$  ( $(i, j) \in \{1, 2, \dots, \ell\} \times \{1, 2\}$ ) は  $z^i$  の 2 次錐  $\mathcal{K}^{m_i}$  に関する固有値と固有ベクトルである. このとき関数  $\Phi_\mu: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  を以下で定義する.

$$\Phi_\mu(y, z) := \begin{pmatrix} y^1 - \mu g^1\left(\frac{y^1 - z^1}{\mu}\right) \\ \vdots \\ y^\ell - \mu g^\ell\left(\frac{y^\ell - z^\ell}{\mu}\right) \end{pmatrix}$$

ただし,  $\mu > 0$  はパラメータである.

このように定義した関数  $\Phi_\mu$  は自然残差関数  $\Phi$  の平滑化関数であることが知られている.[4]

### 3 提案アルゴリズム

本節では, MPSOCC (1.1) を解くためのアルゴリズムを提案する. MPSOCC (1.1) は一見通常の微分可能な非線形 2 次錐計画問題であり, 既存の手法を適用すればよいように見える. ところが, 2 次錐相補性制約  $\mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K}$  をみたす任意の実行可能解において標準的な制約想定が成り立たないことが知られており [7], 既存手法の収束性の理論的保証は難しい. そこで前節で導入した自然残差関数  $\Phi$  を用いて, MPSOCC (1.1) において 2 次錐相補性制約  $\mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K}$  を  $\Phi(y, z) = 0$  で置きかえた次の問題を考える:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x, y) \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && z = Nx + My + q \\ & && \Phi(y, z) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(2.1) から, この問題と MPSOCC (1.1) は等価である. よって, 以降ではこの問題も MPSOCC と呼ぶことにする. 本節では, (1.1) ではなく, MPSOCC (3.1) に対する SQP 法を提案する. SQP 法とは, 元の問題の近似問題である 2 次計画問題 (QP) の最適解を探索方向として点列を生成していくアルゴリズムであり, 非線形計画問題に対する最も有効な手法の一つである. したがって (3.1) に対しても SQP 法が有効に働くことが期待できる. ところが一般に  $\Phi(y, z)$  は必ずしも微分可能とは限らないため, 微分情報を利用した SQP 法を直接適用することはできない. そこで以下のように, 前節で導入した平滑化関数  $\Phi_\mu$  を使って, 等式制約  $\Phi(y, z) = 0$  を滑らかな等式制約  $\Phi_\mu(y, z) = 0$

で置きかえた問題を考える:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && f(x, y) \\
& \text{subject to} && Ax \leq b \\
& && z = Nx + My + q \\
& && \Phi_\mu(y, z) = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで現在の反復点  $w^k := (x^k, y^k, z^k)$  を  $Ax^k \leq b^k$  かつ  $z^k = Nx^k + My^k + q$  をみたす点であると仮定する. このとき探索方向  $d_w := (d_x, d_y, d_z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  を生成するため, (3.2) の目的関数と制約関数をそれぞれ 2 次近似, 1 次近似した関数から構成される次のような QP を部分問題として解く:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize}_{d_w \in \mathbb{R}^{n+2m}} && \nabla f(x^k, y^k)^\top \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} d_w^\top B_k d_w \\
& \text{subject to} && Ad_x \leq b - Ax^k \\
& && D_k d_w = - \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし,  $B_k \in \mathbb{R}^{(n+2m) \times (n+2m)}$  は適当な正定値対称行列であり,  $D_k \in \mathbb{R}^{2m \times (n+2m)}$  は

$$D_k := \begin{pmatrix} N & M & -I_m \\ 0 & \nabla_y \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k)^\top & \nabla_z \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k)^\top \end{pmatrix}$$

と定義される. ここで QP (3.3) における KKT 条件が

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \nabla f(x^k, y^k) \\ 0 \end{pmatrix} + B_k d_w + \begin{pmatrix} N^\top \\ M^\top \\ -I_m \end{pmatrix} u \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k) \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} A^\top \\ 0 \end{pmatrix} \eta = 0 \\
& D_k d_w = - \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k) \end{pmatrix} \\
& 0 \leq b - Ax^k - Ad_x \perp \eta \geq 0
\end{aligned}$$

であることに注意する. ただし,  $(\eta, u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  はラグランジュ乗数である.

さらに本手法では, 探索方向  $d_w$  のステップサイズを定めるため, つぎで定義される  $\ell_1$  ペナルティ関数を用いて直線探索を行う.

$$\theta_{\mu, \alpha}(w) := f(x, y) + \alpha \|\Phi_\mu(y, z)\|_1$$

ここで  $\alpha > 0$  はペナルティ・パラメータである. また  $\theta'_{\mu, \alpha}(w; dw)$  を  $\theta_{\mu, \alpha}(\cdot)$  の  $w$  における  $d_w$  方向の方向微分係数とする. 提案手法を具体的に述べる.

#### Algorithm 1.

**Step 0:** 各パラメータ  $\alpha_{-1} \in (0, \infty)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\delta \in (0, \infty)$ ,  $\mu_0 \in (0, \infty)$ ,  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in (0, 1)$  と正定値対称行列  $B_0 \in \mathbb{R}^{(n+2m) \times (n+2m)}$  を選ぶ. 初期点として  $w^0 := (x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  を  $Nx^0 + My^0 + q = z^0$ ,  $Ax^0 \leq b$  を満たすようにとる.  $k := 0$  とする.

**Step 1:** QP (3.3) を解いて, 最適解  $d_w^k := (d_x^k, d_y^k, d_z^k)$  とラグランジュ乗数  $(\eta^k, u^k, v^k)$  を得る.

**Step 2:**  $dw^k = 0$  ならば  $w^{k+1} := w^k$ ,  $\alpha_k := \alpha_{k-1}$  とする. そうでなければペナルティ・パラメータ  $\alpha_k$  を以下のように更新する. もし  $\alpha_{k-1} \geq \|v^k\|_\infty + \delta$  ならば,  $\alpha_k := \alpha_{k-1}$ , そうでなければ  $\alpha_k := \max\{\|v^k\|_\infty + \delta, \alpha_{k-1} + 2\delta\}$  とする.

**Step 3:** つぎのアルミホ条件をみたす最小の非負整数  $L \geq 0$  をみつけ  $\tau_k := \rho^L$  とする.

$$\theta_{\mu_k, \alpha_k}(w^k + \rho^L dw^k) \leq \theta_{\mu_k, \alpha_k}(w^k) + \sigma \rho^L \theta'_{\mu_k, \alpha_k}(w^k; dw^k)$$

反復点を  $w^{k+1} := w^k + \tau_k dw^k$  と更新する.

**Step 4:** 適当な終了条件が満たされていれば終了. そうでなければ,  $\mu_{k+1} := \beta \mu_k$  とし,  $B_k \in \mathbb{R}^{(n+2m) \times (n+2m)}$  を更新する.  $k := k + 1$  とする.

## 4 収束解析

本節では, 前節で提案したアルゴリズムの収束解析を行う. 最初に部分問題 QP (3.3) の実行可能性と Step 3 の直線探索の有限終了性の観点からアルゴリズムが well-defined であることについて論じる.

一般に SQP 法において, 元の問題が実行可能であっても, 部分問題である QP が実行可能とは限らない. しかし, 今回のケースでは, 行列  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  が Cartesian  $P_0$  行列 [9] ならば QP (3.3) は必ず実行可能解をもつことが示すことができる. Cartesian  $P_0(P)$  行列とは,  $P_0(P)$  行列 [2] の 2 次錐  $\mathcal{K}$  の Cartesian 直積構造への拡張概念であり,  $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^m$  のとき, Cartesian  $P_0(P)$  行列は  $P_0(P)$  行列に帰着される. また (半) 正定値行列は Cartesian  $P(P_0)$  行列である.

**Proposition 4.1.** [11, Proposition 5.1]  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を Cartesian  $P_0$  行列とすると QP (3.3) は実行可能解をもち, 最適解が唯一存在する.

つぎの命題は, QP (3.3) を解いて得られる探索方向  $d_w$  が  $\theta_{\mu_k, \alpha_k}(\cdot)$  の降下方向になることを示す.

**Proposition 4.2.** [11, Proposition 5.2]  $\{w^k\}$  と  $\{dw^k\}$  を Algorithm 1 によって生成される点列とする. このとき

$$\theta'_{\mu_k, \alpha_k}(w^k; dw^k) \leq -(dw^k)^\top B_k dw^k$$

が各  $k$  について成り立つ.

この結果から直ちに Step 2 の直線探索が有限回で終了することがわかる.

つぎに Algorithm 1 によって生成される点列が MPSOCC (1.1) の停留点へ大域的収束することを示す. そのためにつぎの仮定をする.

**Assumption 1.** 行列  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  は Cartesian  $P_0$  行列である. さらに Algorithm 1 によって生成される点列  $\{w^k\}$  と  $\{B_k\}$  に対して, 以下の (1)-(3) が成り立つ.

- (1)  $\{w^k\}$  は有界である.
- (2) ある正の定数  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  が存在して  $\gamma_1 \|d\|^2 \leq d^\top B_k d \leq \gamma_2 \|d\|^2$  が任意の  $d \in \mathbb{R}^{n+2m}$  と  $k$  について成り立つ.

- (3) 正の定数  $c > 0$  が存在して  $\|E_k^{-1}\| \leq c$  が任意の  $k$  について成り立つ.<sup>1</sup> ただし,  $E_k \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$  は

$$E_k := \begin{pmatrix} M & -I_m \\ \nabla_y \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k)^\top & \nabla_z \Phi_{\mu_k}(y^k, z^k)^\top \end{pmatrix}$$

で与えられる.

Assumption 1 (3) は  $M$  が Cartesian  $P$  行列ならば自動的に成り立つ.

Assumption 1 のもとで以下の定理が成立する.

**Theorem 4.1.** [11, Theorem 6.1]  $\{w^k\}$  を Algorithm 1 によって生成される点列とし, Assumption 1 が成り立つとする. さらに  $\bar{w} := (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  を  $\{w^k\}$  の任意の集積点とし,  $\bar{y} - \bar{z} \notin \text{bd}(\mathcal{K} \cup -\mathcal{K})$  が成り立つとする.<sup>2</sup> このとき  $\bar{w}$  は MPSOCC(1.1) の停留点である.<sup>3</sup>

## 5 数値実験

本節では, Algorithm 1 を実装し, 以下のような MPSOCC を解いた.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && z = Nx + My + q \\ & && \mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K} \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{10} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{m \times 10}$  とし,  $M \in \mathbb{R}^m$  は正定値対称行列とした. また 2 次錐の Cartesian 直積  $\mathcal{K}$  として,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{100}, (\mathcal{K}^{50})^2, \mathcal{K}^{50} \times \mathcal{K}^{20} \times \mathcal{K}^{30}, (\mathcal{K}^2)^{50}, (\mathcal{K}^1)^{100}$  を選んだ. 本実験では, 各  $\mathcal{K}$  について, 問題を 50 題ずつ生成し, 各問題に Algorithm 1 を適用する. 問題のデータの具体的な生成方法と Algorithm 1 における各パラメータの選び方および  $B_k$  の更新方法は [11] を参照. ただし, Step 4 の終了条件としては,  $\|\Phi(y^k, z^k)\|_\infty + \|dw^k\|_\infty \leq 10^{-7}$  が満たされたとき, すなわち  $w^k$  が (5.1) における実行可能性と KKT 条件が近似的に満たされたときに終了した. 実験結果は以下の表のとおりである. 各列は, #ite が平均外部反復回数, cpu(s) が計算時

$\mathcal{K}$	#ite	cpu(s)	non(%)
$\mathcal{K}^{100}$	54.20	2.930	100
$(\mathcal{K}^{50})^2$	55.18	3.037	100
$\mathcal{K}^{50} \times \mathcal{K}^{20} \times \mathcal{K}^{30}$	56.28	3.016	100
$(\mathcal{K}^2)^{50}$	78.68	6.012	86
$(\mathcal{K}^1)^{100}$	87.84	6.685	74

間 (秒), non(%) は全問題のうち解  $w = (x, y, z)$  において  $y - z \notin \text{bd}(\mathcal{K} \cup -\mathcal{K})$  が成

<sup>1</sup>  $M$  が Cartesian  $P_0$  行列ならば,  $E_k$  は各  $k$  について正則行列である. [11, Proposition 5.1]

<sup>2</sup> 任意の集合  $C \subseteq \mathbb{R}^m$  に対して  $C$  の境界と内部をそれぞれ  $\text{bd } C$ ,  $\text{int } C$  で表す.  $\mathcal{K} \ni y \perp z \in \mathcal{K}$  を満たす  $y, z$  において  $y - z \notin \text{bd}(\mathcal{K} \cup -\mathcal{K}) \Leftrightarrow y + z \in \text{int } \mathcal{K}$  である.

<sup>3</sup>  $\bar{w}$  が MPSOCC (1.1) の停留点であるとは,  $(-\nabla f(\bar{x}, \bar{y}), 0) \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\bar{w})$  が成り立つときをいう. ここで  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\bar{w})$  は  $\bar{w}$  における実行可能領域の法線錐 [10] である.



立している割合を表す. Theorem 4.1 より, この仮定の下で停留点への収束が保証されていることに注意する. 実験結果より,  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^2)^{50}, (\mathcal{K}^1)^{100}$  のように次元が小さい 2 次錐が含まれている場合に  $y - z \notin \text{bd}(\mathcal{K} \cup -\mathcal{K})$  が成り立っていない例が存在した. しかし, ほとんどの問題においては  $y - z \notin \text{bd}(\mathcal{K} \cup -\mathcal{K})$  が成立しており, 問題 (5.1) の停留点を得ることに成功したことが確認された.

## 参考文献

- [1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-order cone programming, *Mathematical Programming*, 95 (2003), pp. 3–51.
- [2] R. W. Cottle, J.-S. Pang and R. E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, New York, 1992.
- [3] M. Fukushima, Z.-Q. Luo and J. S. Pang, A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints, *Computational Optimization and Applications*, 10 (1998), pp. 5–34.
- [4] M. Fukushima, Z.-Q. Luo and P. Tseng, Smoothing functions for second-order cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, 12 (2001), pp. 436–460.
- [5] M. Fukushima and P. Tseng, An implementable active-set algorithm for computing a B-stationary point of a mathematical program with linear complementarity constraints, *SIAM Journal on Optimization*, 12 (2002), pp. 724–739; erratum, *ibid.* 17(2007), pp. 1253–1257.
- [6] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, 15 (2005), pp. 593–615.
- [7] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang and D. Ralph, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, 1996.
- [8] R. Nishimura, S. Hayashi and M. Fukushima, Robust Nash equilibria in N-person non-cooperative games: Uniqueness and reformulation, *Pacific Journal of Optimization*, 5 (2009), pp. 237–259.
- [9] S. H. Pan and J. S. Chen, A regularization method for the second-order cone complementarity problem with the Cartesian  $P_0$ -property, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70 (2009), pp. 1475–1491.
- [10] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, New York, 1998.
- [11] H. Yamamura, T. Okuno, S. Hayashi and M. Fukushima, A smoothing SQP Method for mathematical programs with linear second-order cone complementarity constraints, *Pacific Journal of Optimization*, to appear.
- [12] T. Yan and M. Fukushima, Smoothing method for mathematical programs with symmetric cone complementarity constraints, *Optimization*, 60 (2011), pp. 113–128.